Condiciones de segundo orden

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Optimización sin restricciones: condiciones de segundo orden

Condiciones de segundo orden

- Retomemos el capítulo de optimización.
- Vimos que concavidad y convexidad son útiles.
- Pero que no todas las funciones son así.

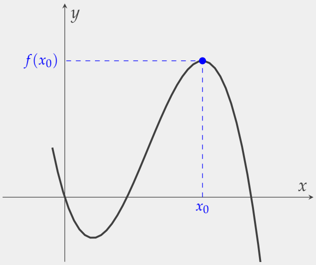
Condiciones de segundo orden

- La intuición de la forma sí nos ayudará en optimización.

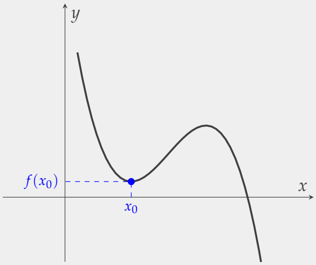
- Supongamos que tenemos un punto crítico, $\mathbf{x}_0$.
  - Si la función es convexa cerca de este punto, $\mathbf{x}_0$ debe ser un mínimo.
  - Viceversa, si la función es cóncava cerca de $\mathbf{x}_0$, entonces es un máximo.
  - Decimos en esos casos que la función es localmente cóncava/convexa.

- Pero puede ser que no tengamos concavidad ni convexidad local.

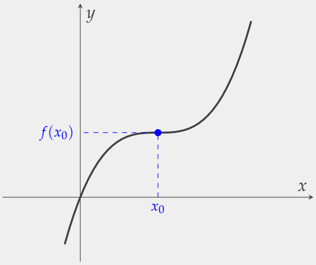
Condiciones de segundo orden



(a) Punto crítico que es máximo local



(b) Punto crítico que es mínimo local



(c) Punto crítico que es punto silla

Condiciones suficientes de segundo orden

- La intuición geométrica la resumiremos en el siguiente “teorema”.
- Luego, daremos un teorema basado en el Hessiano de la función.
  - Siguiendo la discusión de las clases anteriores.
- Y haremos una breve discusión de su uso.

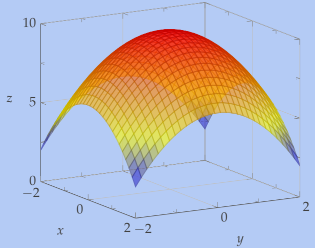
"Teorema" (Concavidad/convexidad local y optimización)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto crítico de f. Tenemos que $\mathbf{x}_0$ es:

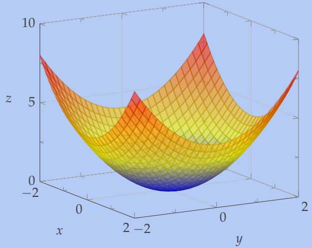
- un mínimo local si f es localmente convexa cerca de $\mathbf{x}_0$.
- un máximo local si f es localmente cóncava cerca de $\mathbf{x}_0$.
- un punto silla si f es localmente cóncava y convexa, pero en direcciones diferentes.

Condiciones suficientes de segundo orden

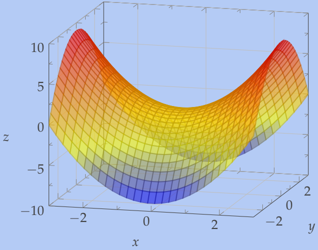
Ejemplo (Concavidad/convexidad local y optimización)



(a) Punto crítico que es máximo local



(b) Punto crítico que es mínimo local



(c) Punto crítico que es punto silla

Condiciones suficientes de segundo orden

Teorema (Condiciones suficientes de segundo orden, CSO)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto crítico (interior) de f. Tenemos que:

- si $H(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\mathbf{x}_0$ es un mínimo local.
- si $H(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa, entonces $\mathbf{x}_0$ es un máximo local.
- si $H(\mathbf{x}_0)$ es indefinida, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto silla.

- Recordemos que H es indefinida si no es semidefinida de ningún tipo.
- Observar que esto no dice qué pasa si f es semidefinida de algún tipo.
  - Podríamos estar en presencia de un máximo local, un mínimo local o nada.

Ejemplo (Condiciones suficientes de segundo orden)

En un ejercicio en la PPT 3.1, vimos dos funciones $f(x,y) = x^2 - y^2$ y $g(x,y) = x^2 + y^2$. Ambas con un punto crítico en $(0,0)$. Las matrices Hessianas de estas funciones son

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por un lado, $H_f(0,0)$ es indefinida, porque no es semidefinida positiva (porque $D_2 = -4 < 0$) y no es semidefinida negativa (porque $D_1 = 2 > 0$). Por el teorema anterior $(0,0)$ es un punto silla de f. Para el caso de g, $H_g(0,0)$ es definida positiva, porque $D_1 = 2 > 0$ y $D_2 = 4 > 0$. Luego, por el teorema anterior $(0,0)$ es un mínimo local.

Ejemplo (Condiciones suficientes de segundo orden)

Para la función de motivación del PPT 3.1 y para el ejercicio de la función $F(K,L)=\sqrt{K+1}+\sqrt{L+1}$ con $p=4$ y $r=w=1$, determine si los óptimos son máximos o mínimos locales.

Condiciones suficientes de segundo orden

- Seamos claros en mencionar que estas condiciones son **suficientes**.

- Podemos tener óptimos locales donde estas condiciones no se cumplan.
  - $f(x) = x^4$, tiene $f''(x) = 12x^2$ y un punto crítico en $(0,0)$.
  - Luego $f''(0) = 0$, que es semidefinida positiva (y negativa).
  - Este punto es un mínimo local que no cumple las condiciones.

- Un poco más adelante hablaremos de condiciones **necesarias**.
  - Pero por ahora necesitamos un poco más de intuición geométrica.
  - Basándonos en el teorema anterior para el caso bivariado.

Teorema (Condiciones suficientes de segundo orden, el caso $n=2$)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Sea (x_0, y_0) un punto crítico (interior) de f. Llamemos:

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \qquad B = f_{xy}(x_0, y_0), \qquad C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

Entonces:

1. Si $A < 0$ y $AC - B^2 > 0$, entonces (x_0, y_0) es un máximo local.
2. Si $A > 0$ y $AC - B^2 > 0$, entonces (x_0, y_0) es un mínimo local.
3. Si $AC - B^2 < 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto silla.
4. Si $AC - B^2 = 0$, entonces (x_0, y_0) puede ser máximo local, mínimo local o punto de silla.

- Notar que según las definiciones del teorema anterior:

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

- Y por lo tanto $AC - B^2$ es el determinante de H.

- Vamos a analizar algunos casos particulares en base a este teorema.

Intuición geométrica

- Pensemos que f tiene punto crítico (x_0, y_0) y que

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

- Entonces según el teorema anterior, (x_0, y_0) es silla (caso 3).

- La idea es:
  - Si el producto es negativo, entonces f_{xx} y f_{yy} tienen signos opuestos.
  - Luego f es cóncava en una dirección (x ó y) y convexa en la otra.

Intuición geométrica

- Pensemos ahora que
$$f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) > 0$$

- Podemos estar en cualquiera de los casos anteriores.

- La idea es:
  - Si el producto es positivo, entonces f_{xx} y f_{yy} tienen el mismo signo.
  - Esto significa que en ambas direcciones, f es cóncava o convexa.
  - Pero eso no basta.

- La función podría ser localmente cóncava (y tendríamos máximo local).
  - O podría ser localmente convexa (y tendríamos mínimo local).
  - Como en los casos 1 y 2.

- ¡Pero podría tener la forma opuesta en otra dirección!
  - Y en ese caso sería punto silla, como en el punto 3.

- Esa es la razón de la existencia del término $-f_{xy}(x_0, y_0)^2$.

Condiciones necesarias de segundo orden

- El cuarto caso nos deja claros la calidad de **suficientes** de las condiciones.
- Bastan para asegurar, pero no tienen por qué cumplirse (no son **necesarias**).
- Cuando no tenemos una conclusión, podemos usar el siguiente teorema.
  - Este sí da condiciones **necesarias**.
  - Y nos puede permitir descartar candidatos en algunos casos.

Teorema (Condiciones necesarias de segundo orden)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{x}_0 \in D$ un punto crítico (interior) de f y $H_f(\mathbf{x}_0)$ la matriz Hessiana de f evaluada en x_0. Tenemos que:

1. Si $\mathbf{x}_0$ es un máximo local, entonces $H_f(\mathbf{x}_0)$ es semidefinida negativa.
2. Si $\mathbf{x}_0$ es un mínimo local, entonces $H_f(\mathbf{x}_0)$ es semidefinida positiva.

- **¡RECORDAR!** Estas condiciones son necesarias.
  - Una matriz Hessiana semidefinida negativa puede no corresponder a un máximo.
  - Y viceversa.

Ejercicio (CPO y CSO)

Tratemos de encontrar óptimos para la función $f(x,y) = 2x + y - e^x - e^{x+y}$. Primero, revisamos las CPO. Tenemos que

$$f_x(x,y) = 2 - e^x - e^{x+y}, \qquad f_y(x,y) = 1 - e^{x+y}$$

La condición $f_y = 0$ nos obliga a que $x + y = 0$, es decir, $x = -y$. Reemplazando esto en la condición $f_x = 0$ nos da

$$f_x(x,-x) = 2 - e^x - 1 = 1 - e^x = 0$$

luego $x = 0$, de donde $y = 0$ también. Con esto, $(0,0)$ es el único punto crítico de f. Tenemos que verificar si este punto es mínimo local, máximo local o un punto de silla.

Ejercicio (CPO y CSO)

Tenemos que

$$f_{xx}(x,y) = -e^x - e^{x+y}, \qquad f_{xy}(x,y) = -e^{x+y}, \qquad f_{yy}(x,y) = -e^{x+y}$$

Como $f_{xx} < 0$ y $f_{yy} < 0$ para todo punto, entonces $f_{xx}f_{yy} > 0$ y como vimos antes, necesitamos el término adicional. Tenemos que

$$f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = -2 \cdot -1 - (-1)^2 = 2 - 1 = 1 > 0$$

y por un teorema anterior, como además $f_{xx} < 0$, tenemos que $H_f(0,0)$ es definida negativa. Por lo tanto, $(0,0)$ es un máximo local y el valor máximo de f en ese punto es -2. Más aún, es un máximo global porque f es cóncava ($H_f(x,y)$ es semidefinida negativa para todo (x,y)).

Ejercicio (CPO y CSO)

Encuentre y clasifique los candidatos a óptimo para las siguientes funciones, siempre que pueda hacerlo.

- $f(x,y) = x^3 - y^3 + 9xy$.
- $f(x,y) = -x^2 + y^4$.
- $f(x,y) = e^{x+y} + e^{x-y} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y$.